Présentation du Problème

Peut-on gagner au casino ?

(A priori, je ne crois pas car il y a deux gagnants à coup sûr : le casino et l'État, et sinon qui perd ?)

Malgré tout, si la réponse est oui comment faire ?

Ou bien comment mettre toutes les chances de son côté pour perdre le moins possible ? (on peut considérer que jouer est un plaisir, comme aller au cinéma, et c'est normal que ce soit payant, mais tant qu'à faire payons le moins possible)

Les règles

On va considérer un jeu à deux (moi et la *banque*) où l'on a

proba(gagner) = p et donc *proba*(perdre) = q = 1-p

On suppose aussi que

mise = *gain*

En général, dans les casinos $p < ½$, d'où l'assurance de notre perte.

Les différentes roulettes

La ***roulette simple*** : on a 37 numéros (de 0 à 36) ; 18 numéros sont rouges, 18 sont noirs et le 0 est vert. Si on parie noir et que le numéro sorti est noir on récupère sa mise plus un gain équivalent (donc 2 fois sa mise en tout), sinon on perd sa mise.(p = 18/37 = 0,486…)

La ***roulette française*** : c'est à peu près la même chose, mais si c'est 0 qui sort, la mise reste *prisonnière* jusqu'au jeu suivant. (p = 36/73 = 0,493…, c'est mieux mais vicieux)

La ***roulette américaine*** (interdite ?) : il y a 38 numéros (un double-zéro supplémentaire) et pas de mise prisonnière (donc 0 et 00 sont favorables à la banque). (p = 18/38 = 0,473)

Gain moyen (pour le casino !!!)

On peut calculer le gain moyen (***espérance mathé-matique***).

Si on suppose que l'on mise à chaque fois 10 € sur le **rouge** et que l'on comptabilise ce que gagne et paye la banque en moyenne, le résultat est : le casino gagne

$$10(1-p) - 10p \text{ € soit } 10(1-2p) \text{ €}$$

donc dès que $p<1/2$ le casino est gagnant.

Plus précisément pour 10 € le casino gagne :

- 0,136 € à la roulette française
- 0,27 € à la roulette classique
- 0,526 € à la roulette américaine

Stratégie des mises constantes

Pour fixer les choses et pouvoir comparer les différentes méthodes et stratégies, on va dire que :

- La mise minimale est 1 euro
- Le capital initial est de A euros
- Le but recherché est d'avoir B euros

La stratégie de mises constantes consiste à jouer K euros à chaque fois et ceci jusqu'à obtention du but recherché ou ruine totale.

Question : vaut-il mieux jouer gros ou petit ? C'est-à-dire jouer 1 euro à la fois ou la plus grosse somme possible (A si $A \leq B$)

Pour examiner le problème, on peut procéder par :

- Expérimentation réelle (à Saint-Amand par exemple mais ça risque d'être coûteux)
- Simulation informatique
- Raisonnement mathématique

Pour la simulation informatique nous allons examiner trois cas :

- A = 10 et B =100 (décupler sa fortune)
- A = 10 et B = 20 (doubler sa fortune)
- A = 10 et B = 11 (augmenter son capital de 10%)

Pour chaque cas on va voir ce qui se passe pour K = 1, K = 5, et K = 10 ; et ceci pour 50 000 essais à chaque fois.

Stratégie des mises constantes

Jeu de pile ou face : p = 1/2

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0974	0,0994	0,1001
(b) doubler	0,4998	0,4998	0,4995
(c) gagner 10%	0,9125		

Roulette française avec mises prisonnières : p = 36/73 = 49,31%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0222	0,0773	0,0876
(b) doubler	0,4433	0,4879	0,4920
(c) gagner 10%	0,8956		

Roulette américaine : p = 18/38 = 47,36%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0002	0,0323	0,0615
(b) doubler	0,2619	0,4485	0,4754
(c) gagner 10%	0,8550		

En réalité le raisonnement mathématique existe, il n’est pas trop difficile (voir poly) et est dû à Huygens (1657), Bernouilli (1680) et Moivre (1711).

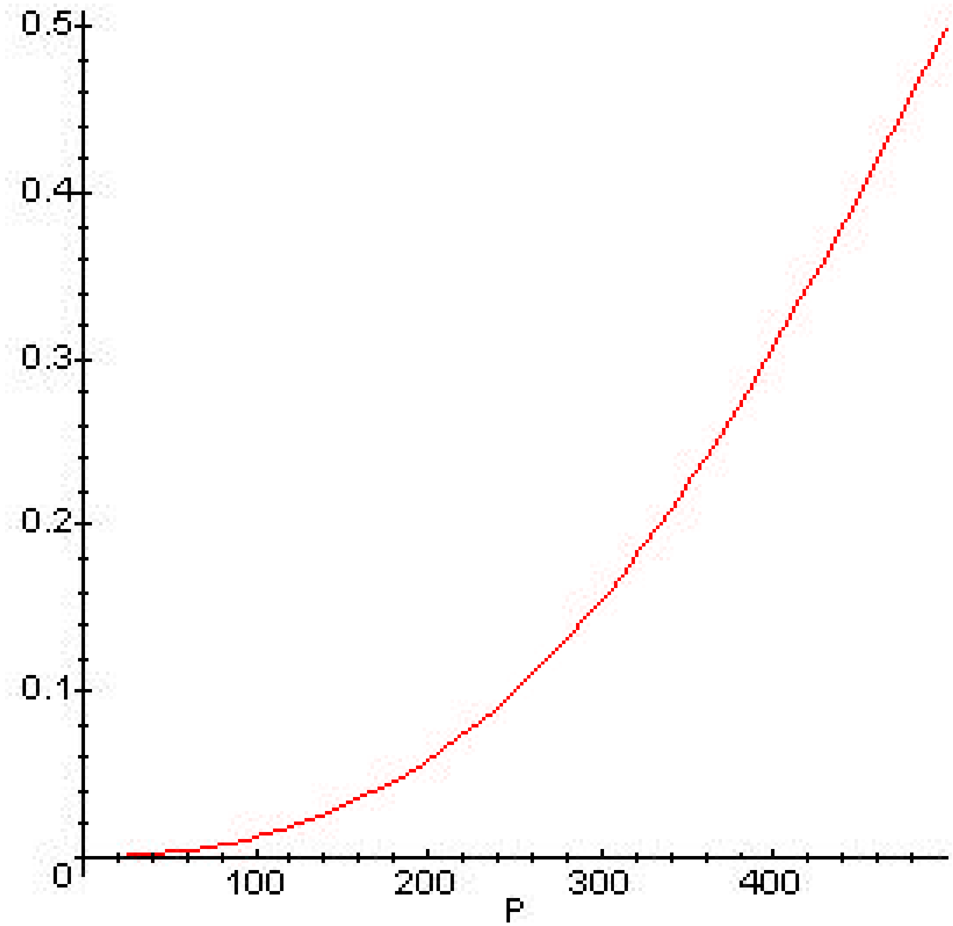
si $p= ½$, la probabilité de réussite est A/B

si $p< ½$, elle est de $(1-(q/p)^{A/K})/(1-(q/p)^{B/K})$

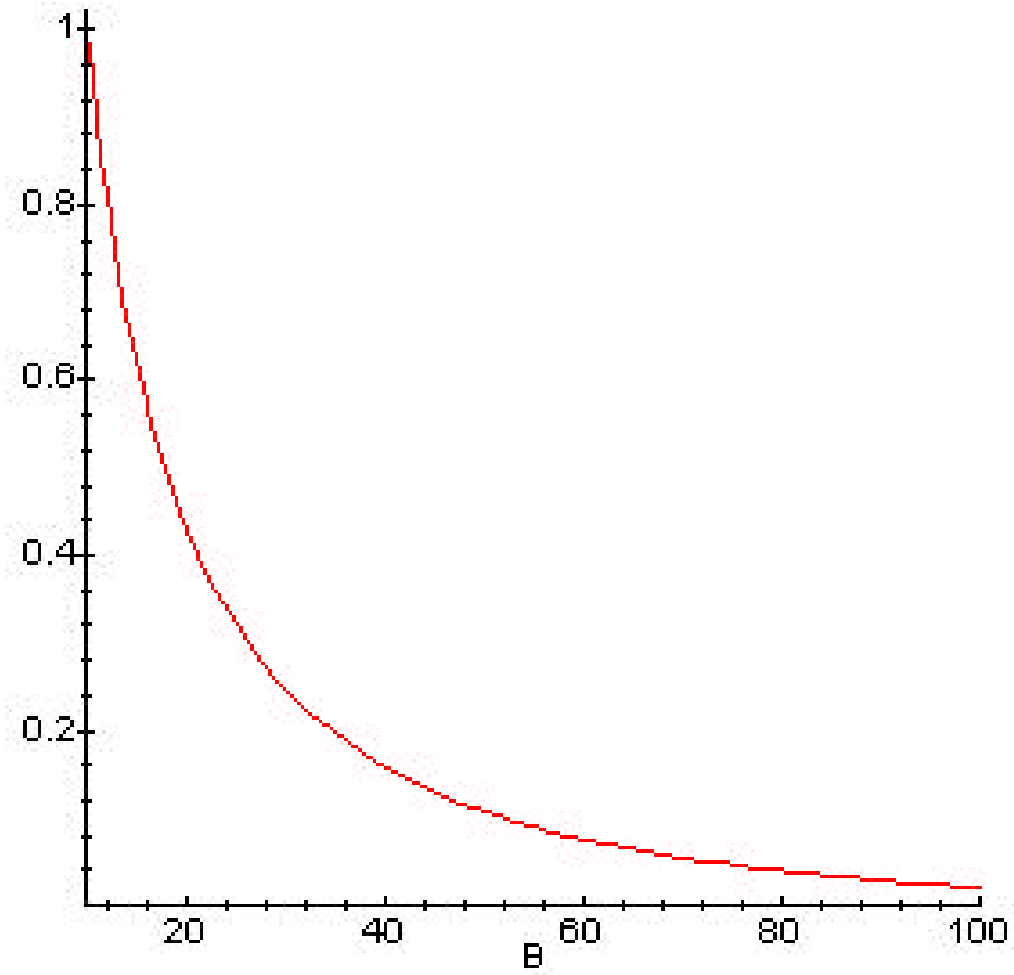
Interprétation :

- Plus p est petit, moins on réussit (logique)
- Plus B/A est grand , moins on réussit (logique)
- Si p et B/A sont fixés, on augmente les chances de réussite en prenant K le plus grand possible (pas évident, pour passer de 10 à 100, mieux vaut miser 10 à chaque fois, risque à tout perdre de suite, que miser 5 et a fortiori que miser 1, qui aurait l’avantage de faire durer le plaisir)

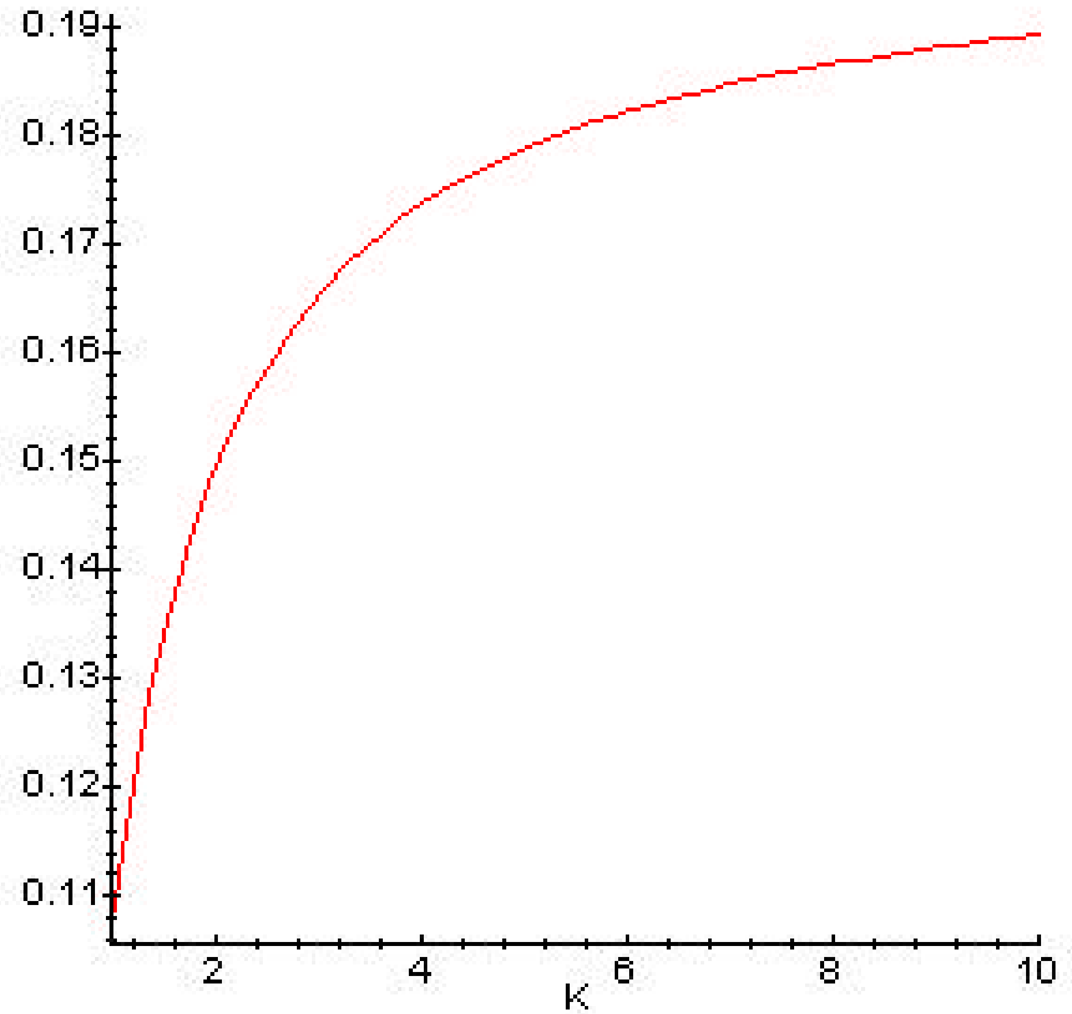
(a) variation de r pour B/A=2 K=5 p varie de 0 à 1/2



(b) variation de r pour p=36/73 K=1 B/A varie de 1 à 10



(c) variation de r pour p=36/73   A=10 B=50   K varie de 1 à 10



Loi de la ruine certaine

Dans un jeu où deux joueurs s'affrontent jusqu'à la ruine de l'un on montre que l'un des deux finit par perdre obligatoirement (même si p= ½ et que leur capital initial soit le même).

La formule de Huygens-Bernoulli-Moivre montre que le plus riche a plus de chances de gagner (l'argent attire l'argent !) ; si p = ½ la proportion de gain est

(fortune du joueur 1)/(somme des deux fortunes)

Conclusion : ne jouez pas avec plus riche que vous

La stratégie des mises constantes n'est pas efficace

La Martingale de d'Alembert

- À chaque fois que l'on gagne on diminue la mise de K (parce qu'on pense que la chance, venant de nous être favorable, risque de l'être moins le coup suivant).
- À chaque fois que l'on perd on augmente la mise de K (pour des raisons symétriques).

NB : cependant pour des raisons évidentes si on est près du but on ne parie pas plus que nécessaire et si, au contraire, on devrait ne plus miser, on mise quand même K

Un exemple :

J’ai 10 euros, je veux atteindre 100 €, et je commence par parier 5 € :

J’ai	Il manque	Je parie	Gagné ou perdu
10	90	5	gagné
15	85	5	gagné
20	80	5	perdu
15	85	10	gagné
25	75	5	perdu
20	80	10	gagné
…	…	…	…
…	…	10	perdu
85	15	15	?

Martingale de d'Alembert

Jeu de pile ou face : p = 1/2

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,1021	0,1009	0,1018
(b) doubler	0,5042	0,5018	0,5012
(c) gagner 10%	0,9080		

Roulette française avec mises prisonnières : p = 36/73 = 49,31%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0789	0,0811	0,0845
(b) doubler	0,4826	0,4854	0,4921
(c) gagner 10%	0,9049		

Roulette américaine : p = 18/38 = 47,36%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0356	0,0372	0,0479
(b) doubler	0,4246	0,4400	0,4739
(c) gagner 10%	0,8858		

La martingale géométrique

La martingale suivante appelée martingale *géométrique* ou *doubling* ou *double-up strategy* est peut-être la plus populaire de toutes tant son principe est simple et semble à première vue infaillible. Parfois on l'appelle simplement *La Martingale*.

On commence par miser K, si on perd on double la mise, et on la double ainsi jusqu'à gagner. Lorsque cela arrive on a perdu K + 2 K + 4 K + ... $+2^n$ K et on a gagné 2^{n+1} K donc on a gagné K. On repart alors avec une mise de K.

Exemple : vous misez 1 €, vous perdez vous misez alors 2 €, vous perdez, vous misez alors 4 €, vous gagnez. Au total sur une telle série vous avez gagné 4 € et perdu 3 €, ce qui donne un bilan positif de 1 € pour vous.

Martingale géométrique

Jeu de pile ou face : p = 1/2

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0990	0,0997	0,0994
(b) doubler	0,4964	0,5003	0,4986
(c) gagner 10%	0,9100		

Roulette française avec mises prisonnières : p = 36/73 = 49,31%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0808	0,0908	0,0917
(b) doubler	0,4784	0,4908	0,4950
(c) gagner 10%	0,9003		

Roulette américaine : p = 18/38= 47,36%

Partant de 10€, misant	K=1€	K=5€	K=10€
Probabilité de réussir à			
(a) décupler	0,0450	0,0623	0,0710
(b) doubler	0,4192	0,4558	0,4743
(c) gagner 10%	0,8866		

Le théorème du jeu hardi

Il s'agit en fait d'un résultat général que tout le monde devrait connaître que j'appellerais le *théorème du jeu hardi* ou *loi de Dubins et Savage* (ils furent les premiers à la démontrer en 1956) :

Théorème du jeu hardi : La meilleure façon de jouer dans un jeu à deux options de probabilité p et 1-p avec p<1/2, pour passer de A à B est obtenue par le jeu hardi ("bold play") consistant à miser toujours ce qui permet d'approcher le plus rapidement le but visé.

CONSÉQUENCE :

Si votre objectif est (a) (passer de A à 10A) vous devez miser A la première fois (c'est le plus que vous pouvez faire) ; puis, si vous avez gagné, miser 2A ; puis si vous avez gagné, misez 4A ; puis finalement misez 2A (car cela vous suffit pour atteindre 10A). Si vous perdez au dernier coup, vous vous trouvez avec 6A, il vous manque 4A, vous misez donc 4A. Etc.

Jeu hardi

Jeu de pile ou face : p = 1/2

Partant de 10€ Probabilité de réussir à	valeur expérimentale	valeur théorique
(a) décupler	0,1011	0,1
(b) doubler	0,5018	0,5
(c) gagner 10%	0,9087	0,9091

Roulette française avec mises prisonnières : p = 36/73 = 49,31 %

Partant de 10€ Probabilité de réussir à	valeur expérimentale	valeur théorique
(a) décupler	0,0954	0,0950
(b) doubler	0,4932	0,4931
(c) gagner 10%	0,9028	0,9042

Roulette américaine : p = 18/38 = 47,36 %

Partant de 10€ Probabilité de réussir à	valeur expérimentale	valeur théorique
(a) décupler	0,0820	0,0819
(b) doubler	0,4736	0,4736
(c) gagner 10%	0,8911	0,8896

(a) Stratégie la meilleure pour passer de A à 10 A

```
     1
   /   \
 1/P   G\1
 /       \
0         2
        /   \             pr(A->10A) = pr(G).pr(2A->10)
      2/P   G\2
      /       \
     0         4   pr(2A->10A) = pr(G).pr(G).pr(G)+
             /   \              pr(G).pr(G).pr(P).pr(G)+
           4/P   G\4            pr(G).pr(G).pr(P).pr(P).pr(2A->10A)
           /       \
          0         8
                  /   \       après calculs on trouve
                2/P   G\2
                /       \
               6        10
             /   \
           4/P   G\4
           /       \
          2        10
```

$$\mathbf{pr(A\text{->}10A) = p^4(1+q)/(1-p^2q^2)}$$

(G désigne un tirage favorable ou joueur, P un tirage défavorable)

(b) Stratégie pour doubler son capital : La probabilité de réussir est bien sûr p.
(c) Stratégie pour gagner 10 % : arbre assez long, je vous laisse les calculs **;-)**

```
                    1
                  /   \
              0,1/P   G\0,1
                /       \
               0,9       1,1
              /   \
          0,2/P   G\0,2
            /       \
          0,7        1,1
         /   \
     0,4/P   G\0,4
       /       \
     0,3       1,1
    /   \
0,3/P   G\0,3
  /       \
 0        0,6
         /   \
     0,5/P   G\0,5
       /       \
     0,1       1,1
    /   \
0,1/P   G\0,1
  /       \
 0        0,2
         /   \
     0,2/P   G\0,2
       /       \
      0        0,4
              /   \
          0,4/P   G\0,4
            /       \
           0        0,8
                   /   \
               0,3/P   G\0,3
                 /       \
               0,5       1,1
              /   \
          0,5/P   G\0,5
            /       \
           0        1
```

Loi de la perte constante.

Quand on joue à un jeu avec une probabilité de gagner de p (pour le joueur) $p<1/2$, alors quelle que soit la stratégie de jeu utilisée on perd proportionnellement à ce qu'on mise. S'il s'agit d'une stratégie qui tente de passer de A à B et si elle conduit à miser en moyenne M francs par tentative, elle réussira dans une proportion de cas **r** telle que

$$\mathbf{r}B - A = (2p-1)M.$$

Exemple : dans le cas de la stratégie optimale pour passer de 100 à 110 € à la roulette française l'expérimentation (100 000 essais) indique qu'on mise en moyenne 38,66 €. La formule de la loi de la perte constante appliquée à partir de la valeur théorique **r** (calculée à la figure 6) donne :

$$(\mathbf{r}\ B - A) / (2p-1) = (0{,}9042656 \times 110 - 100) / (72/73 - 1) = 38{,}74 \text{ €}$$

Réponse à la question de départ

Au total la personne qui prétendait pouvoir gagner à la roulette a tort : plus on joue plus on perd, rien n'y fait. Dans son raisonnement de départ il y avait une erreur : si on vous donne un total de sommes à miser sur les chances simples, il n'existe ni de bonnes façons de le jouer, ni de mauvaises. Ramené au total de l'argent que vous posez sur la table vous ne pouvez ni bien jouer, ni mal jouer.

Gagner autrement contre les casinos ?

Nous avons jusqu'ici supposé que le jeu était équitable, dans le sens que la roulette était bien équilibrée : chaque numéro a une chance sur 37 de sortir (une sur 38 à la roulette américaine). Il se peut que cela ne soit pas le cas parce que la roulette est truquée ou usée (la durée de vie d'une roulette utilisée tous les soirs est d'environ dix ans).

Vient alors l'idée de miser sur ce qui tombe le plus souvent de façon à profiter de l'inégalité des chances entre numéros. L'idée générale d'exploiter l'imperfection des roulettes n'est pas absurde et elle fut effectivement utilisée par William Jaggers à la fin du XIXe siècle. Il gagna ainsi 1 500 000 francs à Monte Carlo à la suite d'une analyse fine des fréquences de sortie des numéros. On cite un autre cas d'utilisation du biais des roulettes mal entretenues en 1947 par Albert Hibbs et Roy Walford alors étudiants au California Institute of Technology.

Info ou Intox?

Plus récemment en 1978 et 1979, Norman Packard et Doyne Farmer par une technique de mesure de la vitesse de la boule et du cylindre portant les numéros réussirent à prévoir la zone où devait arriver la bille avec une précision suffisante pour renverser l'avantage du casino en leur faveur. Cela leur permit de gagner plusieurs milliers de dollars. Les mesures et les calculs étaient faits à l'aide d'appareillages qu'ils portaient sur eux cachés dans leurs vêtements

Autres martingales envisageables

(a) La *Labouchère*

En apparence cette martingale permet de gagner autant qu'on veut (elle est à l'origine de gains très importants... pour les casinos). Elle semble assez astucieuse (voir le raisonnement du joueur) mais elle se base sur la même illusion que la martingale géométrique.

a(1), a(2), a(3), ..., a(n) sont des nombres choisis par le joueur dont l'ambition est de gagner leur somme.

- *Miser toujours la somme du premier et du dernier terme et s'arrêter quand la suite de termes est effacée;*
- *Si on gagne enlever le premier et le dernier terme de la liste* a(1), ..., a(n)
- *Si on perd ajouter à la liste un* a(n+1) *valant* a(1) + a(n)

Raisonnement (faux) du joueur : quand je m'arrête j'ai gagné la somme des termes de la suite initiale car à chaque fois que j'ai perdu j'ai ajouté dans la liste ce que je venais de perdre. Puisque lorsque je gagne j'enlève deux éléments de la suite et lorsque je perds je n'en rajoute qu'un, en moyenne j'en enlève plus que je n'en ajoute, donc à la longue je suis avantagé et je gagne.

Exemple :

			variation de mon capital
2 3 4	je joue 6	je perds	-6
2 3 4 6	je joue 8	je gagne	+8
3 4	je joue 7	je perd	-7
3 4 7	je joue 10	je gagne	+10
4	je joue 4	je perds	-4
4 4	je joue 8	je gagne et je m'arrête	+8
		total	+9 = 2 + 3 + 4

(b) Martingale anti-d'Alembert.

Diminuer sa mise de K francs quand on perd, et l'augmenter de K francs quand on gagne.

De même on peut définir une stratégie anti-géométrique, ou anti-Labouchère etc. en inversement les opérations faites lorsqu'on gagne ou lorsqu'on perd.

(c) La montante hollandaise.

On utilise le même principe que pour la martingale de d'Alembert mais quand on perd plusieurs fois de suite, au lieu d'augmenter la mise de 1 franc à chaque perte, on ne l'augmente qu'une seule fois et on reste sur un palier de K+2 jusqu'à récupérer ses pertes. Lorsque c'est fait on recommence mais en allant cette fois jusqu'à un palier de K+3 auquel on reste jusqu'à récupérer ses pertes si c'est nécessaire, etc.